Mathematik und Logik, siamesische Zwillinge oder einseitige Dominanz(en). Gedanken über zweieinhalbtausend Jahre Wechselwirkungen und einige didaktische Aspekte

Hans-Christian Reichel, Universität Wien

Gebraucht der Zeit, sie eilt so schnell von hinnen!
Doch Ordnung lehrt Euch Zeit gewinnen.
Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In Span'sche Stiefel eingeschnürt
Daß er bedächt'ger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn.
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer
Irrlichteliere hin und her.
Dann lehret man Euch manchen Tag,
Daß, was Ihr sonst auf einen Schlag
Getrieben, wie Essen und Trinken frei
Eins! Zwei! Drei! Dazu nötig sei.

Erste Schüler-Szene; Goethe, Faust, 1. Teil

Kurzfassung: Ob die Mathematik nur eine spezielle Ausformung der Logik, oder ob umgekehrt die Logik ein Teil der Mathematik ist, wurde zu verschiedenen Zeiten durchaus verschieden beantwortet. Im Grunde ist das vielleicht eine falsch gestellte Frage, jedenfalls eine Frage der Philosophie dieser beiden Disziplinen. Der Vortrag handelt von beiden Disziplinen, ihren wechselseitigen Abhängigkeiten und Wechselwirkungen im Laufe der Geschichte. Er behandelt aber auch ganz moderne Aspekte. - Auch didaktische Fragen sollen angesprochen werden.

1. Einleitung

Vor Prüfungen werde ich oft von Studierenden gefragt: „Kommen auch Beweise?" Dann antworte ich i.a., daß *nur* die Beweise kommen, die Merksätze und Formeln verstünden sich von alleine; und damit will ich andeuten, daß in der Mathematik das *Argumentieren* im Vordergrund steht und eigentlich das Wesentliche ausmacht. Begriffe werden oft erst dazu erfunden, damit man besser argumentieren kann. Weil nun in der Mathematik einerseits oft gleichwertige Argumente auftreten, und weil andererseits oft die Argumentation als solche selbst zum Gegenstand der Betrachtung gemacht wird, wird das Argumentieren *formalisiert*. Wir führen Variable ein, Relationen, Funktionen, Mengen, usw.; wir verwenden einheitliche und ausgefeilte Sprechweisen und Definitionen. Für das Schließen verwenden wir Regeln und solche Denkformen, die als *Beweise* gelten, z.B. den *Indirekten Beweis*, der den Satz vom Widerspruch verwendet. Um $A \rightarrow B$ zu zeigen, nehmen wir $\neg B$ (non B) an und führen das zu einem Widerspruch. Dieser, von Hippasos, einem Pythagoreer, bei der Entdeckung der irrationalen Zahlen erstmals verwendete Schluß war den Stoikern - also etwa 300 v.Chr. - Anlaß, diese Denkfigur allgemein zu betrachten und systematisch auch für andere Probleme zu verwenden. (Die so formulierten Paradoxa, z.B. das Zenonsche, sind ja allgemein bekannt). Das systematische Denken, die Logik also, hat ihren Ursprung in der Mathematik und sprang von da auf

die Philosophie über, wenn man es plakativ sagen will. Das werden wir aber gleich genauer besprechen.
Neben dem Indirekten Beweis werden in der Mathematik bekanntlich auch andere Beweisformen systematisch angewendet, z.B. die *Vollständige Induktion*, die letztlich auf der Peanoschen Definition der natürlichen Zahlen beruht und in ihr zum Axiom „erhoben" ist. (Aus der Sichtweise der natürlichen Zahlen kann man übrigens die meisten der allerwesentlichsten Probleme der Philosophie der Mathematik entwickeln. Doch das gehört nur indirekt zu unserem Thema!).

Im Vordergrund des Beweisens stehen die besonders häufig auftretenden *direkten Beweise*, bei denen aus fest umrissenen Ausgangspunkten (oft sind es sogenannte Axiome, oft bereits bewiesene Sachverhalte) schrittweise neue Sachverhalte hergeleitet werden. So, wie es auch im Unterricht täglich geschieht. - Der Kernpunkt dessen sind - korrekt bezeichnet - sogenannte Kalküle.

Ein *Kalkül* besteht grob gesprochen aus

- gewissen Grundzeichen und Grundbegriffen
- aus den Axiomen, bzw. aus den als wahr anerkannten Sachverhalten und
- aus einer Sammlung von Schluß- oder Ableitungsregeln, die man anwendet, um alles weitere, die sogenannten *Sätze* (Theoreme) des Kalküls herzuleiten.

KALKÜL

Zeichen (Symbole) bilden das ***Alphabet*** des Kalküls	***Wohlgeformte Formeln*** (sinnvoll verbundene Zeichen) bilden die ***Aussagen*** des Kalküls	***Axiome:*** Gewisse wohlgeformte Formeln werden als „Ausgangspunkte der Theorie" ausgezeichnet. „Grundbegriffe" treten auf.	***Theoreme:*** Behauptungen (Sätze) mit Beweisen (Ableitungen) bzw. Herleitungen aus den Axiomen.

Einen Satz *beweisen* heißt in diesem Sinn, daß er allein mit Hilfe der zugelassenen Schlußregeln, aus den Axiomen oder bereits bewiesenen Sätzen *hergeleitet* werden kann. *Beweisen* ist gleich: formal korrektes *Ableiten* einer Behauptung. (Diese Sicht der Mathematik heißt Formalismus; wir kommen später noch dazu). Der Arbeit mit logischen und formelhaften Denkregeln schreibt man größere Verläßlichkeit und Sicherheit zu als z.B. der Intuition oder der „bloßen" Anschauung. Und das wieder ist der Kern des sogenannten Rationalismus.

Die erlaubten Schlußregeln in einem Kalkül nennt man die *Logik* des Kalküls. Natürlich müßte die Art der verwendeten Logik korrekterweise bei jedem Beweis immer angegeben werden, zumal es verschiedene Logiken gibt. Wir verwenden ja zumeist die zweiwertige Aristotelische Logik, die wir alle kennen. Und dort, wo eine andere Logik angewendet wird, versteht es sich entweder von selbst oder wird extra betont.
Neben der zweiwertigen Logik, bei der es nur *wahr* oder *falsch* gibt, existieren bekanntlich auch mehrwertige Logiken und andere. Besonders interessant ist die sogenannte *fuzzy-logic*, bei der der Wahrheitswert der auftretenden Aussagen nicht bloß wahr (=1) oder falsch (=0) ist, sondern eine Zahl zwischen 0 und 1 sein kann. Es wird also der - wenn man so will - *Grad der Zustimmung* statt nur durch 0 oder 1 durch eine reelle Zahl aus dem Einheitsintervall [0;1] ausgedrückt:

Interpretation des Wahrheitswertes einer Aussage in der FUZZY LOGIC:

A...eine Aussage

f(A) ist nicht bloß 1 oder 0 (wahr oder falsch), vielmehr ist $f(A) \in [0;1]$

1 wahr

f(A)

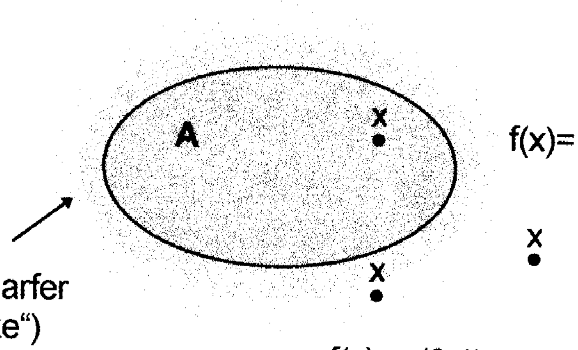
mehr oder weniger wahr oder falsch (eher wahrscheinlich oder nicht)

0 falsch

Die fuzzy-logic stellt in gewisser Weise eine Erweiterung der klassischen Logik dar. Sie ist die mathematische Antwort auf die alltägliche Erfahrung, daß die Frage, ob ein bestimmter Begriff auf einen gegebenen Gegenstand zutrifft oder nicht, oft weder eindeutig mit ja, noch mit nein beantwortet werden kann.
Beispiel: Wie typisch gehören Männer mit dem Alter 20 Jahre, 25, 30, 35, 40, 45,...Jahre zur Kategorie „junger Mann"?

Zur klassischen Logik gehört die *Mengenlehre*: eine Aussage A ist entweder wahr oder falsch, analog: ein Element x gehört entweder zu einer Menge A ($x \in A$) oder es gehört nicht zur Menge A ($x \notin A$). Die Mengenlehre widerspiegelt und konkretisiert also die zweiwertige Logik. Dementsprechend gehört zur fuzzy-logic eine fuzzy-Mengenlehre. Die Grundidee ist folgende:

„Unscharfe Mengen" (Interpretation)



$f(x)=1$ ≙ x gehört zu A

Quasi unscharfer Rand („Wolke")

$f(x)=0$ ≙ x gehört nicht zu A

$f(x) \in (0;1)$ ≙ x gehört mehr oder weniger zu A

Bei der mathematischen Modellierung z.B. technischer Prozesse treten - besonders in der Anfangsphase - oft *„unscharfe Begriffe"* auf, mit denen man aber auch logisch korrekt und effektiv umgehen will und muß. Zu diesem Zweck wurden 1965 von dem amerikanischen Systemtheoretiker LOFTI ZADEH die unscharfen Mengen, die fuzzy sets eingeführt (wie wir sie in der Zeichnung angedeutet haben), desgleichen natürlich ein Kalkül, wie mit diesen unscharfen Mengen zu rechnen ist.

Ein Beispiel für eine unscharfe Menge: Man befrage z.B. einige Schüler, wie typisch folgende Begriffe zur Kategorie „Frucht" gehören: Apfel, Birne, Ananas, Olive, Kastanie, Erdbeere und Feige.

Unscharfer Begriff ≙ unscharfe Menge A				
„Frucht" (laut Befragung):	Apfel	100%	Birne	100%
	Ananas	80%	Olive	30%
	Kastanie	20%	Erdbeere	90%
	Feige	60%		

Bedeutendere Beispiele ergeben sich z.B. in der Robotik, der Phototechnik und in der Technik ganz allgemein.
Tatsächlich sind die fuzzy-logic, die fuzzy-Mengenlehre, die fuzzy-Topologie und andere Gebiete, die sich analog zur klassischen Vorgangsweise aus der Mengenlehre ableiten lassen, heute hoch entwickelt und finden weithin vor allem in den Ingenieurwissenschaften Anwendung (siehe [ZIMMERMANN (1993)], [PREUSZ (1997)] und die dort angeführte Literatur).

Zurück zum Schließen und Beweisen in der Mathematik: Schon jetzt sei erwähnt, daß es neben der oben beschriebenen Auffassung mathematischer Beweise auch *andere Auffassungen* gibt. Beweisen heißt ja eigentlich nichts anderes als „überzeugen" und „zwingend argumentieren". Und in Bezug darauf herrscht naturgemäß nicht Einigkeit. Dennoch wird in allen Systemen stets die Stringenz und korrekte Durchführung eines Beweises verlangt. Nur über die *theoretischen Grundlagen* gibt es Diskussionen; und dazu kommen wir noch. Eine Ausrede für oberflächlich geführte oder lückenhafte Beweisführungen kann man daraus nicht ableiten.

Insgesamt halten wir fürs erste fest, daß jede Art von Schließen und Argumentieren *korrektes Denken* voraussetzt. Der Begriff Logik bedeutet zunächst nichts anderes als die Lehre vom Schließen und vom korrekten Denken. Solches wird natürlich in *jedem* Unterrichtsgegenstand gelehrt und gefördert, in der Mathematik aber steht es oft *eo ipso*, als selbständiges Thema sozusagen, zur Debatte. Und als solches soll es im folgenden und natürlich nur kursorisch behandelt werden.

Die Bezeichnung, das Wort *Logik*, geht übrigens auf die Stoiker der griechischen Antike zurück, auf das etwa dritte vorchristliche Jahrhundert also. „Logos" bedeutet bekanntlich soviel wie Wort, wörtlich gefaßter Gedanke, wissenschaftliches System (vgl. die häufige Endung -logie im System der Wissenschaften!). „Logos" heißt auch: „Grundlage des Denkens", oder ähnlich. Sie alle kennen die Schwierigkeit, die Faust mit der Übersetzung der ersten Worte des Johannes-Evangeliums hatte, wo es heißt: „Im Anfang war das Wort", der „logos" nämlich; und wenig später: „Und das Wort ist Fleisch geworden", wo in beiden Fällen „logos" natürlich viel mehr als bloß „Wort" bedeutet.

Das hier in Rede stehende Wort „Logik" entstammt hingegen sicherlich dem (eher eingeschränkteren) Gebrauch des Wortes logos im mathematischen Schrifttum der Antike. So bezeichnete man schon bei den Pythagoreern mit dem Begriff λόγος das „Verhältnis" zweier Zahlen oder Größen. ἀνα λογον bedeutet „im Verhältnis", und zu Platons Zeit (Timaios 32 b5) steht ανα τὸν αὐτόν λόγον für „nach dem selben Verhältnis", also für „proportional". (Daraus entstand sichtlich auch das Hauptwort ἀναλογία für *Proportion* und das Adjektiv ἀναλογος hauptwörtlich für die

Proportionale. $\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma$ $\grave{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$ steht z.B. in Euklids „Elementen" für „mittlere Proportionale").

In der nachplatonischen Zeit, in der Zeit der „Dekadenz der Begriffssprache, bei zahlreichen populär-mathematischen Autoren wie THEON, NIKOMACHOS, usw." (siehe E.P. WOLFER: Eratostenes von Kyrene als Mathematiker und Philosoph. Noordhoft Verlag, Zürich 1954), haben die beiden Begriffe ἀναλογία und μεσότης („Mittel" im mathematischen Sinn: arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel) ihren Bedeutungsunterschied verloren. Für die drei Mittel wurde oft unterschiedslos ἀναλογίαι verwendet. Nur mehr Fach-Schriftsteller wie PAPPOS z.B. bezeichneten nach wie vor die „geometrische Proportion" als ἀναλογία (Vgl. etwa K. REIDEMEISTER: Das exakte Denken der Griechen. Claasen und Goverts Verlag, Hamburg 1949. Siehe auch: J. KOKKINOS: Das Platonische „Kreuz". Seminararbeit „Zur Philosophie und Kulturgeschichte der Mathematik, Konvers. 1996/97 Universität Wien, Inst. f. Math. Bei Prof. Reichel).

Aber zurück zu Logik und Mathematik, dem Thema dieses Vortrags.

2. Zur Entwicklung der Logik (historischer Abschnitt über die Wechselwirkungen zwischen Logik und Mathematik)

Etwa 350 v.Chr. schrieb EUKLID seine berühmten „Elemente der Mathematik", wo er nicht nur die gesamte damals bekannte Mathematik systematisch zusammenfaßte, sondern womit er - mit seiner *Darstellung* nämlich - unsere Wissenschaft für die nächsten sagen wir 2300 Jahre prägte. Die Geometrie hält einen besonderen Platz, und sie wurde ja in vielen Ländern bis in unser Jahrhundert auch in der Schule so unterrichtet, wie Euklid sie dargestellt hatte.
Euklid beginnt streng mit Definitionen, unterscheidet genau zwischen geometrisch-inhaltlichen Axiomen und solchen logischer Art und fordert für jede seiner Aussagen einen strengen Beweis, wie wir es vorher beschrieben haben. Seine Geometrie ist ein Kalkül, der aus Axiomen und Theoremen besteht, die sämtlich dadurch bewiesen werden, indem sie durch genaue Regeln aus den Axiomen und aus schon bewiesenen Sätzen hergeleitet werden.

Durch genaue Analyse dieses Werkes und der damaligen Mathematik überhaupt kam nun ARISTOTELES (384-322 v.Chr.) als einer der ersten auf die Idee, sich mit den Schlußregeln und Schlüssen, den Syllogismen als solchen auseinanderzusetzen. So gilt er als der Schöpfer der systematischen Logik, bzw. der Analytik, wie er es nannte. Tatsächlich sprechen wir ja auch bis heute von der *Aristotelischen Logik*, wenn wir das klassische Grundgerüst der Logik meinen. Aristoteles erkannte, daß Prämissen und Schlüsse, wie sie aus den Prämissen gezogen werden, letztlich unabhängig sind von deren inhaltlicher Bedeutung; und das ist natürlich die Voraussetzung für eine *Formalisierung* der Logik. Heute spricht man ja überhaupt nur mehr von der *Formalen Logik* oder *„Logistik"*, die einerseits Grundlage der Mathematik und der Informatik ist, und die andererseits ihre modernen und wesentlichen Anwendungen in den formalen Sprachen, der theoretischen Informatik und der Künstlichen Intelligenz gefunden hat.

Was ich eben über die Rolle und das Wesen von Prämissen, Schlußregeln und Folgerungen gesagt habe, ist natürlich auch ein wichtiges Anliegen der Didaktik. Wir sprechen da einfach und kurz vom folgerichtigen Denken, dessen Ergebnisse aber - und das ist wichtig - in gewisser Weise auch von den verwendeten Schlußregeln abhängig sind und als solche deutlich werden sollen. Doch werden die didaktischen Aspekte den Schluß des Vortrags bilden; jetzt soll zuerst die Entstehung unserer Logik weiter verfolgt werden.

Aristoteles isolierte als erster logische Prinzipien wie das sogenannte „Tertium non datur" $A \vee \neg A$ (es gibt nur A oder non-A, die Negation von A; es gibt nur wahr oder falsch, und die doppelte Verneinung entspricht einer Bejahung: $\neg\neg A = A$). Gleichbedeutend gilt der sogenannte „Satz vom Widerspruch", d.h. $A \wedge \neg A$ stellt den perfekten Widerspruch dar[1], und darauf beruht ja auch der bereits besprochene indirekte Beweis in der Mathematik.

Aristoteles unterschied scharf zwischen Logik und Metaphysik. (Die Metaphysik mag sich z.B. mit dem *Grund für die Gültigkeit* der Logik auseinandersetzen, nicht aber mit den Gesetzen der Logik selbst).
Und das ist wohl der Hauptgrund dafür, warum Aristoteles als Begründer der klassischen Logik gilt.

Wie ging die Entwicklung weiter? Lassen Sie mich die wichtigsten Stationen kurz anreißen:

Aristoteles galt bis ins Mittelalter als unumstrittene Autorität. Besonders die Theologen und Philosophen der Scholastik orientierten sich an seiner Lehrmeinung. Die Mathematik galt vielfach als Vorbild für Philosophie und Theologie, eben wegen ihres logischen Aufbaus und wegen der daraus abgeleiteten Stringenz der Aussagen.

So versuchte z.B. der Spanier Raimundus LULLUS (um 1300) sämtliche „Wahrheiten" mit logisch-kombinatorischen Methoden aufzufinden. Mit dieser sogenannten „ars magna" versuchte er auch, durch rotierende Scheiben und mechanische Vorrichtungen eine logische Maschine zu verwirklichen. Die Idee dieser logischen „ars magna" taucht in der Wissenschaftsgeschichte immer wieder auf als Versuch, durch Anwendung rechnerisch-kalkülhafter oder kombinatorischer Verfahren zu wissenschaftlichen Erkenntnissen zu gelangen. Immer wieder sah man in einem logisch-kalkülhaften Aufbau der Wissenschaften die Grundlage für wahre Erkenntnisse.

Auf René DESCARTES (1598-1650) geht die Algebraisierung der Geometrie zurück, der Versuch, geometrisch anschauliche Probleme mit rechnerischen, logisch-kalkülhaften Methoden zu lösen. Die Analytische Geometrie war geboren. - In weiterer Sicht ist damit der Glaube verbunden, sich auf rationales, auf regelhaft-rechnerisches Denken mehr verlassen zu können als auf Anschauung, Intuition, Assoziation und ähnliches. Der so „geborene" Rationalismus bestimmt bis heute große Teile unseres Weltbildes.

Einmal mehr war die Geometrie Vorbild für den Aufbau einer mathematischen Theorie und hier im besonderen der Logik und Philosophie. (Ich erinnere in diesem

---

[1] $A \wedge \neg A = \neg(\neg A \vee \neg\neg A) = \neg(A \vee \neg A)$ ist also immer falsch, egal wie A interpretiert wird. - Genauer siehe weiter unten.

Zusammenhang etwa an B. SPINOZA, der sogar die Ethik more geometrico aufbauen wollte. - Vgl. [REICHEL (1990)]).

Wieder aufgegriffen wurden Logik und Mathematik als die Grundlage aller Wissenschaften insbesondere durch G.W. LEIBNIZ (1646-1716) mit der Hoffnung, in einer Art logischer „ars inveniendi" alle Wahrheiten und nur diese kalkülhaft und algebraisch erzeugen zu können, wie es eben für geometrische Aussagen in der Analytischen Geometrie geschieht. Auch hier liegt dann die Idee nahe, die Arbeit mit logischen Regeln und Formeln einer Art von Maschine zu überlassen. Was regelhaft abläuft, kann ja von einer Maschine nachgeahmt und vielleicht sogar besser gehandhabt werden. Und tatsächlich bilden die Logik und die Schaltalgebra (5. Klasse) ja auch die Grundlage der modernen Computer. Leibniz dachte eben schon, daß eine derart logische Maschine gebaut werden könnte, die nach der Art eines „calculus ratiocinator" alle Wahrheiten erzeugen würde. Umgekehrt könnte so auch automatisch geklärt werden, ob irgendeine vorgegebene Formel ableitbar, also „beweisbar" ist oder nicht.

Und tatsächlich war das auch die erste Frage der neueren Logik, ob es in einem Formelsystem ein Verfahren gibt, das von jedem vorgegebenen Satz entscheiden könnte, ob er beweisbar (in dieser Sicht also „wahr") ist oder nicht. (Diese Hoffnung wurde in ihrem Allanspruch bekanntlich erst 1931 durch Kurt GÖDEL zunichte gemacht; doch dazu später).

Die Frage nach einer *Algebraisierung der Logik* wurde dann im 19. Jahrhundert besonders virulent und auch gelöst. Hier sind vor allem zwei Namen zu nennen: George BOOLE (1815-1864) und Gottlob FREGE (1846-1935). Auch Georg CANTOR (1845-1918) trug mit seiner Erfindung der Mengenlehre viel zu einer Algebraisierung und mengentheoretischen Veranschaulichung der (Aussagen-) Logik bei. (Siehe z.B. das Kapitel über die Sprache der Mathematik und über die Schaltalgebra in der 5. Klasse). In George BOOLEs Buch „The Laws of Thought. Mathematical analysis of logic" (1847) und in Gottlob FREGEs sogenannter „Begriffsschrift" (1879) wurden nicht nur die eben beschriebenen Ideen Leibniz' verwirklicht, es wurden auch die Grundlagen für die heute übliche kalkülhafte Darstellung der Logik gelegt.

2.1. Die Prädikatenlogik, ihre wichtigsten Erweiterungen und Fragen der neuzeitlichen Logik

Lassen Sie mich in einem kurzen Überblick andeuten, was man unter „Prädikatenlogik" versteht, und wie man durch Erweiterungen und Veränderungen zu anderen Logiken kommen kann. Beginnen wir mit der sogenannten Aussagenlogik:

Aussagenlogik
A, B, C, ... „Aussagen“ (das ist ein Grundbegriff)
Aussagen werden belegt mit einem „Wahrheitswert“ w (=1) oder f (=0)
Verknüpfungen: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
(interpretiert als *und, nicht-ausschließendes Oder, nicht, folgt, ist äquivalent)*
Die Verknüpfungen werden definiert durch sogenannte Wahrheitstafeln, z.B.:

A	$\neg$A
w	f
f	w

A	B	A $\wedge$ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	A $\vee$ B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A	B	A $\rightarrow$ B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Auch hier sind natürlich *Interpretationen* möglich. (Keine Logik kommt ohne Sprache aus, keine Sprache ohne Logik!)

Tautologien (Wahrformeln)
Dies sind Aussagen, die bei *jeder* Belegung von A, B, C, ... den Wahrheitswert w haben.
Beispiel: A $\vee$ $\neg$A, der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

A	$\neg$A	A $\vee$ $\neg$A
w	f	w
f	w	w

Gleichwertigkeit von Aussagen
z.B.: (A $\rightarrow$ B) $\leftrightarrow$ $\neg$ (A $\wedge$ $\neg$ B)
Beweis:

A $\rightarrow$ B	A	B	$\neg$ B	A $\wedge$ $\neg$ B	**$\neg$ (A $\wedge$ $\neg$ B)**
w	w	w	f	f	w
f	w	f	w	w	f
w	f	w	f	f	w
w	f	f	w	f	w

A $\rightarrow$ B und $\neg$ (A $\wedge$ $\neg$ B) haben den gleichen Wahrheitsverlauf, sind daher äquivalent.

Andere Beispiele:
- (A $\rightarrow$ B) $\leftrightarrow$ ($\neg$ B $\rightarrow$ $\neg$ A)
- $\neg$ (A $\wedge$ B) $\leftrightarrow$ ($\neg$ A $\vee$ $\neg$ B) (de Morgan)

Als Einzelaussagen gesehen - als Äquivalenzen also - sind das natürlich Tautologien!

1. Tautologien machen sozusagen den „Inhalt der (Aussagen-) Logik aus!

Erweiterungen der Aussagenlogik
Hinzunahme von
Variablen, Konstanten, Relationen (wie z.B. $\leq$, etc.), *Funktionen*,...
Ferner *Quantoren* $\forall$, $\exists$; *Klammern* (,) als technische Zeichen,...
Dies führt zum Kalkül der ***Prädikatenlogik***
erster Stufe, wenn nur über Variable quantifiziert wird: $\forall\ x \in S$, ...
zweiter Stufe, wenn auch über Mengen quantifiziert wird: $\forall\ S \subset \mathbb{N}$, ...

2. Die **Modallogik** ist eine Erweiterung der Prädikatenlogik. Sie entsteht durch Hinzunahme sogenannter *Modaloren:*
$\Box\ \varnothing$ .... $\varnothing$ gilt möglicherweise
$\Diamond\ \varnothing$ .... $\varnothing$ gilt notwendigerweise

Negation: $\neg \Box \varnothing \leftrightarrow \Diamond \neg \varnothing$ und $\neg \Diamond \varnothing \leftrightarrow \Box \neg \varnothing$

Vergleiche: $\neg \forall x: P(x) \leftrightarrow \exists x: \neg P(x)$ und $\neg \exists x: P(x) \leftrightarrow \forall x: \neg P(x)$

3. Eine wieder andere Erweiterung ist die sogenannte **Deontische Logik**, wo
$\Diamond\ \varnothing$ .... $\varnothing$ ist erlaubt und
$\Box\ \varnothing$ .... $\varnothing$ ist geboten
bedeutet (also hinzugenommen wird). Die Negationen sind analog zu oben.

Weitere Erweiterungen (bzw. Veränderungen) führen zu den sogenannten **nicht-klassischen Logiken**, wie etwa die **mehrwertigen Logiken**, wo außer w und f noch andere „Wahrheitswerte" zugelassen sind, z.B. u (mit der Interpretation „unbestimmt" oder auch „unentscheidbar"). Bis hin zur sogenannten **fuzzy-logic**, wo Wahrheitswerte aus dem ganzen Einheitsintervall zugelassen sind (Interpretation von f(A) dann „mehr oder weniger wahrscheinlich"), etc. (siehe oben).

2.2. Logik und Mathematik seit dem 19. Jahrhundert

Um 1900 war die Logik so weit ausgebaut, daß man ihr sogar eine fundamentale Rolle für die Mathematik überhaupt zudachte. Man hielt die Logik nicht nur für a-priorisch im Sinne KANTs, man räumte ihr auch eine *vor* aller Wissenschaft existente Rolle ein. Insbesondere sollte die gesamte Mathematik nichts anderes als eine spezielle Ausformung der Logik sein. Diese Grundhaltung heißt *Logizismus.*

Sie geht vor allem auf Alfred North WHITEHEAD (1861-1947) und Bertrand RUSSELL (1872-1970) zurück. In ihrem damals bahnbrechenden Werk „Principia Mathematica" (1910) stellten sie die formalisierte Logik an die Spitze, und die ganze Mathematik sollte dann als nichts anderes als die Gesamtheit aller Ausdrücke „$A \to B$" dargestellt werden, Mathematik also ausschließlich als Gesamtheit von logischen Schlüssen. Alle Begriffe sollten auf logische Grundbegriffe und auf solche der Mengenlehre, die als Bestandteil der Logik aufgefaßt wurde, zurückgeführt werden.
Funktionen wurden z.B. als spezielle Teilmengen von kartesischen Produktmengen gesehen, Folgen und Reihen wieder als spezielle Funktionen, usw., wie wir das ja

aus den Schulbüchern der siebziger Jahre kennen, wo man fälschlicherweise dachte, eine logische Fundierung würde den Lehrstoff einsichtiger und die Probleme zugänglicher machen.
Insbesondere die natürlichen Zahlen wurden im Logizismus allein im Reich der Logik und Mengenlehre aufgebaut:

0 wird mit der leeren Menge identifiziert: $0 \triangleq \emptyset$,
1 mit der Menge, die nur aus der leeren Menge besteht: $\{\emptyset\}$,
2 mit der Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0,1\}$, usw.
$(n+1) := n \cup \{n\}$

Das alles ist sehr sinnvoll, hat aber aus heutiger Sicht einen eher eingeschränkten Wert!

Kardinalzahlen wie 1, 2, 3, usw. wurden mit der Klasse jeweils gleichmächtiger Mengen identifiziert.[2] Man dachte, alles auf die Mengenlehre zurückführen zu können und diese wiederum auf die - sagen wir - reine Logik.
Und alldem ordnete man eine tiefere Bedeutung zu als bloß eine sprachlogische, oder als eine Vereinfachung und zur größeren Durchsichtigkeit der mathematischen Sprache, wie man das heute im Unterricht vielleicht verfolgt.

Insgesamt wurde also zu Beginn dieses Jahrhunderts eine Begründung der Mathematik aus der Logik heraus angestrebt.

Den auftretenden Widersprüchen in der Mengenlehre CANTORs wurde auf mehrfache Weise begegnet, insbesondere z.B. dadurch, daß auch die Mengenlehre axiomatisch-kalkülhaft aufgebaut wurde (ZERMELO und FRAENKEL). Man hoffte schließlich, die gesamte Mathematik durch möglichst widerspruchsfreie Kalküle darstellen zu können (David HILBERT), und man hatte anfangs auch große Erfolge mit dieser Sichtweise.

Freilich zeigten zwei große - sagen wir - Einwände, daß dieser Logizismus (und später Formalismus) *nicht* die gesamte Mathematik beschreiben kann. Diese zwei Einwände sind
a) der *Unvollständigkeitssatz* von Kurt GÖDEL (1931) und
b) die Einwände des sogenannten *Intuitionismus*.

Zum einen: Kurt GÖDEL zeigte Anfang der dreißiger Jahre, daß kein Kalkül (also auch nicht die logischen Kalküle) seine Widerspruchsfreiheit aus sich heraus beweisen kann. Für Widerspruchsbeweise braucht es immer eine stärkere, den in Frage stehenden Kalkül übersteigende Annahme. Nach Gödels Unvollständigkeitssatz gibt es in jedem die Prädikatenlogik und die Arithmetik umfassenden Kalkül stets Aussagen, die aus den Axiomen weder abgeleitet noch widerlegt werden können (solche Aussagen heißen „unentscheidbar", die Kalküle heißen „unvollständig"). ([GÖDEL: Über formal unterscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandte Systeme I, Monatshefte für Mathematik 38 (1931)]). Es ist also auch die Prädikatenlogik zweiter Stufe unvollständig (sofern sie auch die

[2] Eine noch „modernere" Sicht definiert Kardinalzahlen nicht als „Klassen", sondern als „Mengen" im Sinn der axiomatischen Mengenlehre. Doch das würde hier zu weit führen.

Arithmetik umfaßt) und ihre Widerspruchsfreiheit kann nicht aus sich heraus bewiesen werden.
Das war natürlich eine Art „Todesstoß“ für den seit Leibniz und ansatzweise früher gehegten Glauben, man könne alle Wahrheiten durch logisch-kalkülhaftes, ja maschinelles Vorgehen erzeugen.
Unentscheidbare Formeln können in gewissen Modellen (=Interpretationen) wahr sein, sodaß man einräumen muß: Wahrheit ist - grob gesprochen - wieder *mehr* als Beweisbarkeit in einem Kalkül; ontologische Fragen der Philosophie werden heute wieder bedeutsamer.

Überdies weiß man seit einigen Jahrzehnten, daß es - für einen vorgegebenen Kalkül - im allgemeinen kein finites Verfahren geben kann, das für eine gegebene Aussage immer feststellen kann, ob sie herleitbar ist oder nicht.

Mathematik ist nach all diesen Erkenntnissen *mehr* als ein formales System von Axiomen und Ableitungsregeln.[3] Auch entwickelte sich die Mathematik in unserem Jahrhundert so stark, daß niemand mehr auf die Idee kommen würde, sie als bloße Ausformung der Logik zu sehen. All diese neuen Gebiete und Methoden, Computermathematik, usw. hatte man damals natürlich nicht erahnen können. Und tatsächlich hat die Philosophie der Mathematik heute andere Probleme als den Grundlagenstreit des beginnenden 20. Jahrhunderts.

Doch zurück zum *zweiten* Einwand gegen den logischen Formalismus:
Der zweite Einwand betraf eher die Interpretation der klassischen Logik, in der es wie gesagt nur wahre und falsche Aussagen gibt. Wenn man eine Aussage erst dann als wahr anerkennt, wenn sie expressis verbis bewiesen ist, und als falsch, wenn sie widerlegt wurde, so gilt der Satz von der doppelten Verneinung *nicht* mehr so unmittelbar, wie er uns bislang erschienen ist. Non-non-A muß nicht mehr A bedeuten: etwas, was nicht widerlegt werden kann oder wurde, ist deswegen noch lange nicht bewiesen, also gültig. Für die Mathematiker, die diesen Einwand ernst nehmen, die sogenannten Intuitionisten (oder verwandt: die Konstruktivisten) gilt natürlich auch das Tertium non datur nicht mehr: $A \vee \neg A$ ist keine Wahrformel mehr.
Die Aussage $A \wedge \neg A$ wird natürlich überall als Widerspruch empfunden, aber seine Verneinung ergibt nur dann das Tertium non datur, wenn man die doppelte Verneinung anerkennt: $\neg (A \wedge \neg A) = \neg A \vee \neg \neg A = \neg A \vee A$ (das Tertium non datur).
Was die intuitionistische Auffassung betrifft, denken Sie etwa an Sätze, die bisher weder bewiesen noch widerlegt wurden (z.B. ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt oder nicht, etc.). A oder non-A würde hier voraussetzen, daß A entweder wahr oder falsch ist, wenn auch A bisher weder bewiesen noch widerlegt wurde. Und das wäre dann ja eine Art „Allwissenheitsprinzip“, das man auch wieder nicht gerne voraussetzen möchte.
Solange z.B. nicht erwiesen ist, ob es unendlich viele oder nur endlich viele Primzahlzwillinge gibt, können wir aus dieser Sicht auch nicht behaupten, daß eine der Aussagen wahr bzw. die andere falsch ist.

Damit in gewisser Weise „verbunden“ ist eine Interpretation des Existenzquantors, bzw. des Existenzbegriffes. Während im Formalismus und Logizismus die Aussage „es gibt ein...“ auch als „bloße“ Verneinung des Allquantors anerkannt wird:
$$\exists x: P(x) \leftrightarrow \neg \forall x: \neg P(x),$$

[3] Siehe z.B. Anhang 2.

verlangt der Intuitionismus für eine Aussage dieser Art ein explizites Aufweisen der als existent behaupteten Größe, bzw. deren explizite Konstruktion.
Beispiel: Eine reelle Zahl heißt algebraische Zahl, wenn sie Nullstelle eines Polynoms $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i sein kann. Nun zeigt man aber (z.B. mit Hilfe des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra), daß es nach dieser Definition nur abzählbar viele algebraische Zahlen geben kann. Da es aber nach dem Cantorschen Diagonalverfahren überabzählbar viele reelle Zahlen gibt, muß es eine (sogar überabzählbar viele) nicht-algebraische Zahlen geben. Solche Zahlen heißen transzendente Zahlen.
Aus der Sicht des Konstruktivismus, bzw. wegen der erwähnten Kritik des Intuitionismus, darf man aber erst dann „es gibt eine transzendente Zahl" sagen, wenn man von (mindestens) einer Zahl konstruktiv zeigen kann, daß sie transzendent ist. (In diesem einfachen Fall bildet das kein Problem, denn LINDEMANN hat schon im 19. Jahrhundert expressis verbis gezeigt, daß z.B. π transzendent ist).
Freilich sind auch mit dieser prima vista so klaren Haltung wieder Probleme verbunden, z.B.: *wer* muß den konstruktiven Beweis führen können? Muß *ich* das sein, oder genügt es, wenn jemand anderer („man") eine konkrete Konstruktion ausführen kann? Oder genügt vielleicht sogar ein Computer? (Problem des Sollipsismus; u.a.m.).

In der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts wurden noch andere und zum Teil sehr tiefliegende „Einwände" gegen die - sagen wir - Überschätzung der Rolle laut, welche wir der Logik und dem Logizismus für „unser Leben" zuschreiben, bzw. genauer: für Erkenntnistheorie und Philosophie. Damit verbunden wurde eine Kritik des Logizismus und des „Rationalismus" ganz allgemein. Einer der wesentlichsten Ansätze, der sprachlogische, ist Ludwig WITTGENSTEIN (1889-1951) zuzuschreiben (Stichwort: Analytische Philosophie; auch bei ihm war übrigens die Mathematik Propädeutik und Paradigma seiner Philosophie. Vgl. [REICHEL (1990)]. Siehe Anhang 1. WITTGENSTEIN und die Philosophen des Wiener Kreises sind u.a. für die Philosophie besonders wesentlich, in diesem Vortrag sollen aber vor allem die für die Mathematik wichtigen Aspekte behandelt werden.)

Wir fassen zusammen: Die Sicht der Logik, wie man sie noch im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts hatte, ist heute eine ganz andere geworden. Heute hat die Logik vor allem die Theorie der *Formalen Sprachen* zum Gegenstand. Diese haben sowohl eine *Syntax* als auch eine *Semantik.* Die *Syntax* legt fest, welche die zugelassenen Ausdrücke der Sprache sind, die *Semantik* definiert die Bedeutung der Aussagen und insbesondere ihren Wahrheitswert. Die verbreitetste Logik ist die Prädikatenlogik erster Stufe, wie wir sie vorher kurz beschrieben haben. (Ihre Begriffe werden - wie ebenfalls oben angedeutet - gegebenenfalls auf andere Logiken ausgedehnt und entsprechend erweitert). Eine besondere Rolle spielt die Logik heute als Grundlage der *Theoretischen Informatik* und der *Algorithmik.*
Die formale Logik ist heute ein Teil der Mathematik wie andere Teile auch, z.B. die Algebra oder die Statistik. Fast ist es umgekehrt als beim Logizismus der Jahrhundertwende, als die Mathematik der Logik untergeordnet werden sollte!

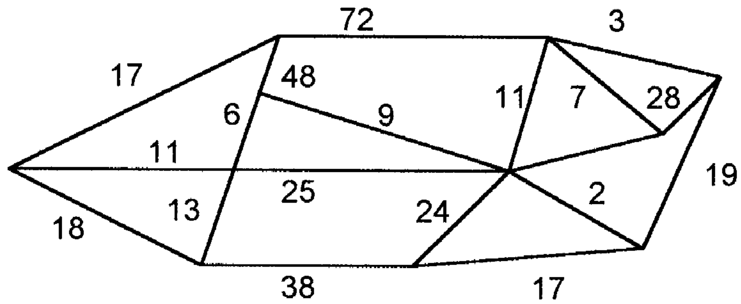
Ging es früher z.B. im wesentlichen darum, ob ein gewisser Ausdruck abgeleitet werden kann, ob er prinzipiell beweisbar ist oder nicht, so geht es heute - im Zeitalter der Computer - auch und vor allem darum, ob er praktisch mit den vorhandenen Mitteln, mit vernünftigem Aufwand also und in absehbarer Zeit abgeleitet werden kann. Es geht also heute auch um die *praktische Realisierbarkeit* von Herleitungen und der wirklichen Durchführung gewisser Algorithmen, also Rechenverfahren.

Ich möchte nun meinen bisher naturgemäß etwas theoretischen Exkurs mit einem *Beispiel* zu dem letztgesagten abschließen. Danach kommen noch einige Worte über die didaktische Relevanz unseres Themas.

2.3. Ein typisches Problem der modernen Logik (bzw. Komplexitätstheorie)

Denken wir an das HORNERsche Schema (aus dem Buch der 5. Klasse) zur Berechnung von $p(x_0)$, wo p ein Polynom und x_0 eine reelle Zahl ist. Oder denken wir an einen der üblichen Algorithmen zur Berechnung der Fibonaccizahlen $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$; $x_0 = 0, x_1 = 1$.
Diese Algorithmen haben *polynomiale Laufzeit*, d.h. die Laufzeit hängt in polynomialer Weise von der Anzahl charakteristischer Eingabedaten ab.

Nun denken Sie z.B. an das *Problem des Handlungsreisenden*, das in der Wirtschaft in vielen Situationen auftaucht: Die Kanten eines Graphen mit gegebener Knotenzahl sind bewertet. Die Knoten stellen etwa gewisse Städte eines Landes dar, die Zahlen geben z.B. an, was es kostet, längs dieser Kante (Straßenverbindung) von der einen Stadt zur anderen zu fahren.



Gesucht ist ein optimaler Weg, der alle Knoten besucht, in unserem Beispiel etwa der billigste Weg, der durch alle Städte geht.

Zur allgemeinen Lösung des Problems ist aber bisher kein Verfahren mit polynomialer Laufzeit bekannt, obwohl es prinzipiell natürlich nur endlich viele Möglichkeiten gibt. Man kann hingegen von einem vorgegebenen Weg mit polynomialem Aufwand feststellen, ob er wirklich optimal ist, ob also wirklich eine Lösung vorliegt.

Derartige Probleme treten sehr häufig auf. So ist etwa das Problem der HAMILTONschen Wege in einem Graphen von dieser Art. Hiezu zählen auch *Entscheidungs-* und *Optimierungsprobleme*. Probleme, die obige Bedingung allgemein erfüllen[4], heißen *np-schwer*. Sie gelten als praktisch *ungelöst*, weil für die Praxis nur polynomiale Laufzeiten in Frage kommen; selbst dann, wenn sie prinzipiell natürlich lösbar sind, da es ja nur endlich viele Möglichkeiten gibt!

[4] Entscheidungsprobleme, bei denen nämlich eine vorgegebene prospektive Lösung mit polynomialem Aufwand als solche erwiesen oder widerlegt werden kann, auch wenn das Problem selbst nicht „polynomial lösbar" ist.

Die Klasse P der polynomialen Algorithmen (genauer: Entscheidungsprobleme) ist natürlich eine Teilklasse von NP, der Klasse der np-schweren Entscheidungsprobleme: $P \subseteq NP$. (Aus Gründen, die wir hier nicht erörtern, spricht man von „non-deterministic polynomial problems").[5]

Wir alle kennen einige große ungelöste Probleme der klassischen Mathematik, z.B. das bereits genannte der Primzahlzwillinge. Aber es sind uns kaum Probleme *unserer* Zeit bekannt, die zwar - wenn man so will - unter den Nägeln brennen und einfach zu formulieren sind, die aber offen und ungelöst sind. Ein solches der sogenannten *Komplexitätstheorie* ist die Frage, ob nicht vielleicht gilt $P = NP$.
1971 hat der theoretische Informatiker S. COOK ein np-schweres Problem gefunden (das sogenannte Erfüllbarkeitsproblem), von dem er zeigen konnte, daß, wenn dieses Problem in polynomialer Zeit lösbar wäre, dann auch *jedes* andere np-schwere Problem. Wir können also prinzipiell hoffen, daß z.B. für das Problem des Handlungsreisenden ein polynomialer Algorithmus gefunden wird. Allein: wahrscheinlich ist es nicht!

In der Praxis der Optimierungsaufgaben, z.B. beim Beförderungsdienst für Behinderte in Berlin, haben wir es oft mit np-schweren Problemen zu tun. (In gewisser Weise ist es dem Problem des Handlungsreisenden ähnlich). Dennoch ist auch bei solchen np-schweren Problemen die Sache nicht hoffnungslos: wir müssen eben gewisse Einschränkungen und Vorgaben finden, unter denen wir das gegebene Problem dann doch durch - sagen wir - Computeralgorithmen in „menschlicher" Zeit und bei sinnvollem Speicherplatzbedarf lösen können. Und meist funktioniert das auch.

Das war nur *ein* Problemkreis der Theoretischen und der Praktischen Informatik und damit der modernen mathematischen Logik. Er sollte zeigen, welche Themen heutzutage anstehen, was natürlich nicht bedeutet, daß wir die neueren Probleme ausgeschöpft hätten oder daß andererseits die klassische Logik passé wäre!

3. Didaktische Aspekte

Welche Bedeutung hat nun die mathematische Logik für den Unterricht?

Vorerst einmal soll Logik natürlich keinen eigenen Unterrichtsgegenstand bilden, wir Mathematiklehrer sollen natürlich nicht Logik unterrichten. Andererseits aber soll all das Gesagte natürlich doch eine Rolle für den Unterricht spielen. Lassen Sie mich mein Anliegen kurz mit den Worten Hans FREUDENTHALs sagen, einer von jenen bedeutenden Mathematikern dieses Jahrhunderts, die sich wissenschaftlich auch mit Fragen der Didaktik und der Schulmathematik auseinandergesetzt haben. Ich zitiere aus seinem Buch „Mathematik als Pädagogische Aufgabe":

„Der Lehrer soll, was er oder sie lehrt, in einer Form wissen, die anders ist als die, in der er oder sie es lehrt. Er/sie soll nicht nur über dem Stoff stehen, den er oder sie

---

[5] Die Komplexitätsklasse NP der „np-harten" Probleme ist nicht einfach zu definieren. Hier geht es nur um einen „ersten Einblick". Man muß ja auch noch zwischen Zeit- und (Speicher-) Platzoptimalität unterscheiden, u.v.a.m.

unterrichtet, sondern auch über der logischen Form *des Stoffes. Dazu muß er oder sie die logische Tiefe des Stoffes loten können. - Dabei hilft ihm die Logik, wenn sie mehr ist als indirekter Beweis, Umkehrung von Sätzen, Äquivalenz, usw. Der Mathematiklehrer* (Frauen sind natürlich immer miteingeschlossen; Bem. d. Verf.) *soll nicht Logik unterrichten, sondern sich der Logik bedienen, und er soll die Logik, derer sich die Schüler bedienen, diesen bewußt machen!"*

Freudenthal weist oft darauf hin, daß es (Zitat) *„wenig Sinn hat, einen logischen Formalismus unabhängig vom Stoff zu unterrichten, dem er die Form geben soll. Logik kann sinnvoll sein, wenn sie nicht um ihrer selbst willen betrieben wird. Logik als Selbstzweck überlasse man den Logikern. Die Schüler sollen die logischen Schemata und Formen in Sätzen und Beweisen erkennen lernen, und sie sollen lernen, sich in ihren Formulierungen solcher Formen zu bedienen. Sie sollen vor allem aber auch lernen, aus dieser Logik in sprachlichen Situationen nicht-mathematischer Art Nutzen zu ziehen."*

Denken Sie an Formulierungen, die Worte wie „dann" oder „nur" oder „nur dann", „weil", usw. verwenden oder verwenden sollen, wie z.B. beim Thema Teilbarkeit in der 2. Klasse oder bei der Analysis der 7. und 8. Klasse. Und im Mathematikunterricht sollen dann und wann auch rein umgangssprachliche Sätze verwendet und analysiert werden! Wesentliche Tätigkeiten im Mathematikunterricht sind schließlich auch Dinge wie *Spezialisieren, Schematisieren, Verallgemeinern, Definieren-Lernen,* die *Ausgangspunkte einer Argumentation* zu erkennen (siehe z.B. das Beweiskapitel zum Pythagoreischen Lehrsatz in der 4. Klasse).

Schließlich spielt auch das *Reden* über formelhaftes Rechnen und Zeichnen eine wichtige Rolle, und vieles andere mehr, das zu den Anliegen der Logik zählt. Dies sind alles Dinge, die man bei uns Mathematiklehrern sozusagen unter der Hand und quasi als Nebenprodukt lernt. Die Mathematik ist so gesehen einer der wichtigsten Bestandteile der Allgemeinbildung und der AHS.

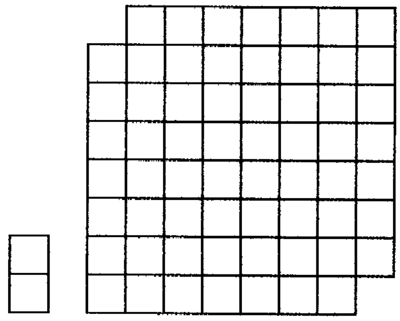
Anhang 1:

Was hier nicht behandelt wurde, sind die bedeutsamen Wechselwirkungen zwischen Logik und *Philosophie*. Weil aber im Vortrag Ludwig WITTGENSTEIN genannt wurde (an dem man in diesem Zusammenhang natürlich nicht vorbeigehen kann), sollen wenigstens zwei der in dieser Hinsicht bedeutendsten Zitate genannt werden: In seinem „Tractatus logico-philosophicus" (1919) versucht WITTGENSTEIN - durchaus dem Zeitgeist des Logizismus entsprechend -, Erkenntnistheorie und vor allem Philosophie auf der Logik aufzubauen. Er beginnt mit einer ausführlichen Erörterung der Aussagen- bzw. Prädikatenlogik erster Stufe (siehe oben), um - die mathematische Struktur eines Kalküls nachahmend - die Philosophie aus der Logik heraus aufzubauen (bzw. dies zu versuchen). Freilich findet sich dort in 6.52 dann der folgende Satz: *„Wir fühlen, daß, selbst wenn alle möglichen wissenschaftlichen Fragen beantwortet sind, unsere Lebensprobleme noch gar nicht berührt sind."* Und in 6.41: *„Der Sinn der Welt muß außerhalb ihrer liegen."*
Später widerspricht übrigens WITTGENSTEIN seiner Philosophie des ersten Lebensabschnittes expressis verbis und „sieht ein" - wenngleich von ganz anderer Seite als Kurt GÖDEL -, daß Logik in der formalisierten Form nicht „ausreicht", um die

Probleme der Philosophie und der Erkenntnistheorie voll zu erfassen. - Dies aber ist kein philosophischer Vortrag, daher sei hier bloß auf das erst nach dem Tod WITTGENSTEINs veröffentlichte Buch (sowie auf die reichhaltige Literatur) verwiesen: Philosophische Untersuchungen, suhrkamp, Frankfurt 1984 (1. Band der Werkausgabe);

Anhang 2:

Daß Mathematik nicht nur aus formalen Wenn-Dann-Beziehungen, aus (sturem) Regel- und Formelanwenden besteht, ersieht man aus zahlreichen Beispielen, die auch auf Schulniveau vorgeführt werden können und „echte" Mathematik sind, in dem Sinn nämlich, daß sie zeigen, was Mathematiker *tun*, wenn sie - sagen wir - nachdenken bzw. forschen. Hier nur ein Beispiel, das auf E. ARTIN zurückgeht:



Das in der Figur gezeichnete Brett soll so mit den ebenfalls gezeichneten Doppelsteinen ausgelegt werden, daß jedes Feld genau einmal überdeckt wird (Parkettierung). Man kann das oft versuchen, es gelingt prinzipiell nicht.
Beweis: Denken wir uns das Brett wie ein Schachbrett schwarz/weiß eingefärbt. Die fehlenden beiden Felder müssen natürlich die gleiche Farbe haben, sagen wir: schwarz. Dann aber besitzt das ganze Feld genau zwei weiße Felder mehr als es schwarze besitzt. Jeder Doppelstein - egal wie er liegt - überdeckt aber naturgemäß genau ein weißes und ein schwarzes Feld. Wenn eine Parkettierung existierte, müßte das Brett also genau so viele weiße wie schwarze Felder haben. Widerspruch!

Anhang 3: (Dialogische Logik)

Die Vorstellung, daß Beweisen nichts anderes heißt, als zu überzeugen, hat P. LORENZEN um die Mitte unseres Jahrhunderts (und etwas früher) formalisiert und theoretisch ausgebaut. In seiner *dialogischen Logik* diskutieren ein Proponent und ein Opponent. Der Proponent behauptet eine Aussage, eine Formel, etc. Im folgenden „Dialog" (Beweisfigur, Argumentationsgang) hinterfragt (formal korrekt) der Opponent jede (Einzel-) Behauptung des Proponenten, bzw. versucht, Einsprüche zu erheben oder zu widerlegen, etc. Ein *Beweis* besteht nun einfach aus einer *Strategie*, die es dem Proponenten erlaubt, gegen jeden Opponenten zu gewinnen. (Näheres und Genaueres findet man in: P. LORENZEN und K. LORENZ: Dialogische Logik. Wiss. Buchges., Darmstadt 1978; sowie in: G. HAAS: Konstruktive Einführung in die formale Logik. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1984.)

LORENZEN selbst hat diese Methode angewandt, um ein „Programm" zu verfolgen, das der HILBERTschen Sicht des Formalismus angehört. D. HILBERT fordert bekanntlich, die gesamte Mathematik durch Kalküle bzw. in Kalkülen darzustellen. Ein derartiger Kalkül ist, sobald er geschrieben ist, natürlich nur sinnvoll, wenn er (zumindest relativ) widerspruchsfrei ist. Demzufolge ist es dann besonders wichtig, daß man für einen Kalkül dessen Widerspruchsfreiheit beweist. (Siehe dazu allerdings unsere Ausführungen über GÖDELs Unvollständigkeitssatz und seinen Beweis, daß kein hinreichend reichhaltiger Kalkül seine Widerspruchsfreiheit aus sich selbst heraus beweisen kann!). Denjenigen Teil der Mathematik, der die Widerspruchslosigkeit von Kalkülen beweisen sollte, nannte HILBERT *„Metamathematik"*.

Anhang 4:

Sozusagen als Zusatz, der sowohl historisch interessant ist, wie auch in Hinblick auf die Unterrichtswirklichkeit, füge ich einen Anhang hinzu, nämlich einen Auszug aus der Schrift „Methode und Psychologie des Gelehrten" von Blaise PASCAL aus der Mitte des 17. Jahrhunderts. Es geht um eine Regel für Definitionen und Sätze der Geometrie, die aber ganz allgemein für die Mathematik gelten könnte.
Während EUKLID noch dachte, prinzipiell alles und jedes definieren zu müssen (wie etwa Punkte, Gerade, rechte Winkel, usw.), sieht PASCAL die Sache in puncto logischer Darstellung der Mathematik ein wenig anders, und man möchte meinen mit einem kleinen didaktischen „Hintergrund":

„Regeln für die Definitionen

1. *Keines von den Dingen definieren wollen, die in sich selbst so bekannt sind, daß man keine noch klareren Begriffe hat, um sie zu erklären.*
2. *Keinen der etwas dunklen und doppeldeutigen Begriffe undefiniert lassen.*
3. *Bei der Definition der Begriffe nur vollkommen bekannte oder schon erklärte Wörter verwenden.*

Regeln für die Axiome

1. *Bei jedem der notwendigen Prinzipien, wie klar und notwendig es auch sein mag, zuerst fragen, ob es anerkannt wird.*
2. *Nur vollkommen selbstevidente Dinge zu Axiomen begehren.*

Regeln für die Beweise

1. *Keines von den Dingen beweisen wollen, die so selbstevident sind, daß es nichts noch Klareres gibt, um sie zu beweisen.*
2. *Alle etwas dunklen Sätze beweisen und zu ihrem Beweis nur sehr evidente Axiome oder schon anerkannte oder bewiesene Sätze verwenden.*
3. *Stets im Geiste die Definitionen an die Stelle der Definierten setzen, damit man nicht durch die Doppeldeutigkeit der Begriffe, die man durch die Definition eingeschränkt hat, getäuscht werde."*

LITERATUR

[BE] O. BECKER: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. suhrkamp, Frankfurt 1975.

[FR] H. FREUDENTHAL: Mathematik als Pädagogische Aufgabe. Bände 1, 2. Klett-Verlag, Stuttgart 1973.

[GÖ] K. Gödel: Über formal unterscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandte Systeme I, Monatshefte für Mathematik 38 (1931).

[HR] H. HUMENBERGER, H.-C. REICHEL: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. B.I.-Wissenschaftsverlag, Heidelberg 1995.

[PR] A. PREUSZ: Fuzzy Logic. In: Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht 50/1 (1997), S. 4-7.

[RE(1990)] H.-C. REICHEL: Mathematik als Paradigma und Propädeutik der Philosophie. In: Mathematische Semesterberichte 37 (1990), S. 180-215.

[RE(1992)] H.-C. REICHEL: Mathematik und Weltbild seit Kurt Gödel. In: E. PRAT, H.-C. REICHEL (Hgb.): Naturwissenschaft und Weltbild. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1992.

[RE(1995)] H.-C. REICHEL: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. In: Wissenschaftliche Nachrichten Sept. 1995, S. 20-25.

[TW] H.P. TUSCHIK, H. WALTER: Mathematische Logik - kurzgefaßt. (Grundlagen, Entscheidbarkeit, Modelltheorie, Mengenlehre). B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, etc. 1994.

[ZIE] J. ZIEGENBALG: Algorithmen. Spektrum-Verlag, Heidelberg 1996.

[ZIM] H.-J. ZIMMERMANN et al.: Fuzzy Logic. In: Spektrum der Wissenschaft, März 1993, S. 90-103.

Ich danke Herrn Mag. Peter Pfligl für Durchsicht und Anfertigung des Typoskripts.

Adresse des Autors:

Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans-Christian Reichel
Institut für Mathematik
Universität Wien
Strudlhofgasse 4
1090 Wien